① Plošný element v rovině

kartézské souřadnice x, y

$$dS = dx\,dy \qquad dS\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 1$$

polární souřadnice ϱ, φ

$$x = \varrho \cos\varphi$$
$$y = \varrho \sin\varphi$$

matice přechodu mezi bází $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

transformace komponenty hustoty

$$dS\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right] = \underbrace{|\det A|}_{\varrho}\ \underbrace{dS\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right]}_{1} = \varrho$$

$\Downarrow$

$$dS = \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

② Rozklad jednotky na válci

mějme válcovou plochu $C = \mathbb{R} \times S^1$
pokrytou souřadnicemi:

$U \quad \{x, \varphi\} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)$

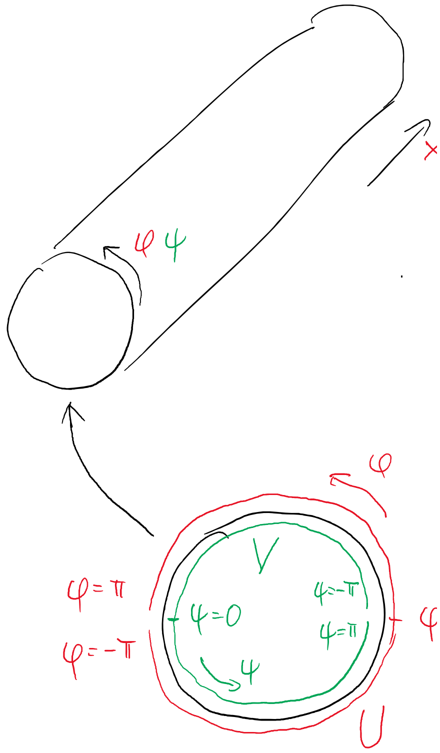
$V \quad \{y, \psi\} \qquad y \in \mathbb{R} \qquad \psi \in (-\pi, \pi)$

související vztahy

$$x = y$$

$$\psi = \begin{cases} \varphi - \pi \\ \varphi + \pi \end{cases}$$

viz obrázek



Zintegrujte hustotu

$$\omega = \exp(-x^2)\cos^2\varphi \, dS = \exp(-y^2)\cos^2\psi \, dS$$

kde

$$dS = dx\,d\varphi = dy\,d\psi$$

je homogenní plošný element na C

řešení:

ω definuje hladkou hustotu na celém C
oba výrazy pro ω se shodují na překryvu souřadnic
v bodě, kde jedny souřadnice nejsou definované, lze použít druhé

lehce ověříme

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \sin^2\frac{\psi}{2} \qquad \text{tj.} \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\psi}{2} = 1$$

máme tak rozklad jednotky daný funkcemi $\cos^2\frac{\varphi}{2}$ a $\cos^2\frac{\psi}{2}$

integrál ω přes C:

$$\int_C \omega = \int_U \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\omega + \int_V \cos^2\frac{\psi}{2}\,\omega \qquad \leftarrow \text{rozdělení na podoblasti pomocí rozkladu jednotky}$$

$$= \int_U \cos^2\frac{\varphi}{2} \exp(-x^2) \cos^2\varphi \, dx\, d\varphi \, + \qquad \leftarrow \text{přechod k souřadnicovým hustotám}$$

$$+ \int_V \cos^2\frac{\psi}{2} \exp(-y^2) \cos^2\psi \, dy\, d\psi$$

$$= \int_{x\in\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx \int_{\varphi\in(-\pi,\pi)} \cos^2\frac{\varphi}{2} \cos^2\varphi \, d\varphi \qquad \leftarrow \text{přechod k souřadnicovému integrování a faktorizace 1D integrálů}$$

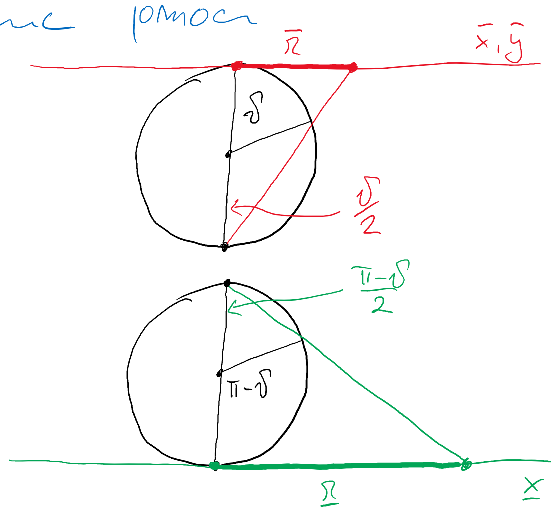
$$+ \int_{y\in\mathbb{R}} \exp(-y^2)\, dy \int_{\psi\in(-\pi,\pi)} \cos^2\frac{\psi}{2} \cos^2\psi \, d\psi$$

$$= \pi^{3/2} \qquad \leftarrow \text{vyčíslení integrálů}$$

③ Rozklad jednotky na S^2

nechť ϑ, φ jsou standardní souřadnice na S^2

definujme dva systémy souřadnic pomocí stereografické projekce



$\bar{x}, \bar{y}$ $\quad$ $\bar{x} = \bar{r}\cos\varphi$ $\quad$ $\bar{r} = \tan\frac{\vartheta}{2}$

$\bar{y} = \bar{r}\sin\varphi$

x, y $\quad$ $x = r\cos\varphi$ $\quad$ $r = \cot\frac{\vartheta}{2}$

$y = r\sin\varphi$

- vyjádřete metriku
  $$g = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$
  a metrický plošný element
  $$dS = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$
  v souřadnicích $\bar{x}, \bar{y}$ a x, y

- zintegrujte přes S^2 hustotu
  $$\square = \frac{1}{\sin\vartheta}\, dS$$

řešení:

platí $\bar r\,\underline{r} = 1$

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{1+\bar r^2} = \cot^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\underline{r}^2}{1+\underline{r}^2} = 1-\frac{1}{1+\underline{r}^2}$$

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{1+\cot^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{1+\underline{r}^2} = \tan^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\bar r^2}{1+\bar r^2} = 1-\frac{1}{1+\bar r^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{1+\bar r^2}+\frac{1}{1+\underline{r}^2} = 1$$ rozklad jednotky

platí

$$d\bar r = \frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\,\frac{1}{2}\,d\vartheta \quad\Rightarrow\quad d\vartheta^2 = 4\cos^4\frac{\vartheta}{2}\,d\bar r^2 = \frac{4}{(1+\bar r^2)^2}\,d\bar r^2$$

$$\sin^2\vartheta = 4\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{4\bar r^2}{(1+\bar r^2)^2} = \frac{4\underline{r}^2}{(1+\underline{r}^2)^2}$$

$\Downarrow$

$$g = d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 = \frac{4}{(1+\bar r^2)^2}\left(d\bar r^2+\bar r^2 d\varphi^2\right) = \frac{4}{(1+\bar r^2)^2}\left(d\bar x^2+d\bar y^2\right)$$

podobně: konformně ploché

$$g = \frac{4}{(1+\underline{r}^2)^2}\left(d\underline{x}^2+d\underline{y}^2\right)$$

plošný element

$$dS = \frac{4}{(1+\bar r^2)^2}\,d\bar x\,d\bar y = \frac{4}{(1+\underline{r}^2)^2}\,d\underline{x}\,d\underline{y}$$

případně v souřadnicích $\bar r,\varphi$ a $\underline{r},\varphi$

$$dS = \frac{4\bar r}{(1+\bar r^2)^2}\,d\bar r\,d\varphi = \frac{4\underline{r}}{(1+\underline{r}^2)^2}\,d\underline{r}\,d\varphi$$

řešení:

$$\square = f\, dS \qquad f = \frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{1+\bar{r}^2}{2\bar{r}} = \frac{1+\underline{r}^2}{2\underline{r}}$$

$$\int_{S^2} \square = \int_{\bar{U}} \frac{1}{1+\bar{r}^2} f\, dS + \int_{U} \frac{1}{1+\underline{r}^2} f\, dS =$$

$$= \int_{\bar{U}} \frac{1}{2\bar{r}} \frac{4\bar{r}}{(1+\bar{r}^2)^2} d\bar{r}\, d\varphi + \int_{U} \frac{1}{2\underline{r}} \frac{4\underline{r}}{(1+\underline{r}^2)^2} d\underline{r}\, d\varphi$$

$$= 2\int d\varphi \int_0^\infty \frac{1}{(1+\bar{r}^2)^2} d\bar{r} + 2\int d\varphi \int_0^\infty \frac{1}{(1+\underline{r}^2)} d\underline{r}$$

$$= 2\pi \left[\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}^2} + \arctan \bar{r}\right]_0^\infty + 2\pi \left[\frac{\underline{r}}{1+\underline{r}^2} + \arctan \underline{r}\right]_0^\infty$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2$$

vskutku, naivní integrace ignorující body, kde souřadnice ϑ, φ nejsou definované dává:

$$\int_{S^2} \square = \int_{S^2} \frac{1}{\sin\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^\pi d\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 2\pi^2$$